Institut Galilée
Dép. de Mathématiques
Licence sciences 1^{re} semestre.

Novembre 2013

Questions à préparer sur l'intégration

1. Sans chercher à calculer l'intégrale montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt = 0$$

2. Déterminer le sens de variation de la fonction $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.
Donner, à l'aide de la méthode des rectangles, un encadrement d'amplitude 10^{-1} de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

3. Pour p et q dans $\mathbb{N}^*$, calculer $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$.
Indication : on calculera $B(p,1)$ et on déterminera une relation entre $B(p,q)$ et $B(p,q-1)$.

4. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \sin(\sqrt{\xi})\,d\xi$ à l'aide d'un changement de variable.

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)^3}$.
1. Déterminer deux réels a, b vérifiant $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x-1)^3}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]1,+\infty[$.

6. On rappelle la formule $\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$.
A l'aide du changement de variable $t = \tan x$, calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2+\cos(2x)}$$

7. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^1 x^{2013}(x^2+1)^{1999}dx \qquad \text{et} \qquad \int_{-\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{5}} \frac{\mathrm{sin(sin(tan\ x))}}{\mathrm{ln(1+x^2)}}\mathrm{dx}$$