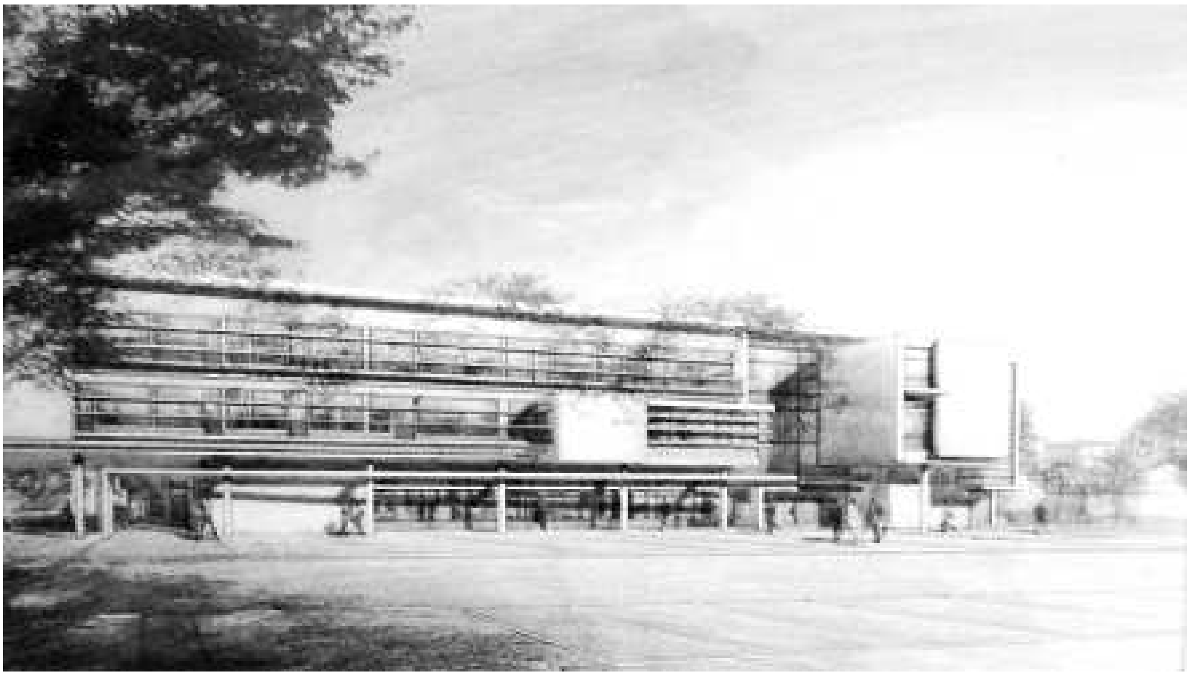
Institut Galilée

Sciences et technologies



Licence 1re année

Mathématiques pour les sciences

Premier semestre

Département de Mathématiques

www.math.univ-paris13.fr/depart

Table des matières

Chapitre 4

Intégration

1 Intégrale des fonctions continues sur un intervalle fermé borné

1.1 Définition géométrique de l'intégrale

Définition 1.1.1 *Pour toute fonction f continue et positive sur un intervalle $[a,b]$, on appelle intégrale de f sur $[a,b]$ l'aire du domaine $\mathcal{S}$ délimité par les droites d'équations $y=0$, $x=a$, $x=b$ et le graphe de f. L'intégrale de f sur $[a,b]$ se note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.*
Lorsque f n'est pas positive sur $[a,b]$ on définit l'intégrale sur $[a,b]$ comme la différence entre l'aire de la partie de $\mathcal{S}$ située au-dessus de l'axe des abscisses et celle de la partie de $\mathcal{S}$ située au-dessous de l'axe des abscisses.

Remarque : Dans cette notation $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, la variable t est une variable "muette". On a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple : On a $\displaystyle\int_1^2 x\,dx = \frac{1+2}{2}(2-1) = \frac{3}{2}$ d'après la formule de l'aire d'un trapèze.

1.2 Propriétés de l'intégrale

Premières propriétés

On déduit de la définition les propriétés suivantes :

Proposition 1.2.1 *On a :*

(i). $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)\,dt$ *et* $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt$ *(Linéarité).*

(ii). *Si f est positive sur $[a,b]$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$ *(Positivité).*

(iii). *Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.

(iv). *Si M et m vérifient pour tout $x \in [a,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors*
$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a) \text{ (Inégalité de la moyenne).}$$

(v). *Pour tout $c \in]a,b[$* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ *(Relation de Chasles).*

(vi). *On a* $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$.

Conventions

Définition 1.2.2 *Soit $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit par convention :*
$$\int_c^a f(t)\,dt = -\int_a^c f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_a^a f(t)\,dt = 0$$
Le choix de ces conventions permet de généraliser la relation de Chasles de la façon suivante :

Proposition 1.2.3 (Relation de Chasles) *Soit I un intervalle fermé et borné dans $\mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux sur un I. Alors pour tous réels a, b et c dans I, on a*
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Extension aux cas des fonctions continues par morceaux

Définition 1.2.4 (Fonctions continues par morceaux) *On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ est continue par morceaux s'il existe un entier $N \geq 2$ et des nombres $c_1, c_2, \ldots, c_N$ vérifiant $a = c_1 < \cdots < c_N = b$, tels que f soit continue sur chacun des intervalles $]c_i, c_{i+1}[$ $(i = 1...N-1)$ et que les limites de f aux bornes de ces intervalles existent et soient finies.*

Remarque : Toute fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$. Il suffit en effet de prendre $N = 2$.

Au vu de la définition, pour tout $i \in \{1,..,N-1\}$ la fonction f_i définie par
$$f_i(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in]c_i, c_{i+1}[\\ \lim_{x \to c_i^+} f(x) & \text{si } t = c_i \\ \lim_{x \to c_{i+1}^-} f(x) & \text{si } t = c_{i+1} \end{cases}$$
est continue sur $[c_i, c_{i+1}]$. On peut alors définir, en cohérence avec la relation de Chasles, l'intégrale de f sur $[a,b]$ par
$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f_i(t)\,dt$$

Valeur moyenne et propriété de la moyenne

Définition 1.2.5 (Valeur moyenne d'une fonction) *Le nombre* $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ *est appelé valeur moyenne de la fonction f sur $[a,b]$.*

Théorème 1.2.6 (Théorème de la moyenne) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction* **continue**. *Alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f(c)$$

La valeur moyenne de f est donc une valeur prise par la fonction f.

Démonstration : La fonction f étant continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$, il existe deux éléments u et v de $[a,b]$ tels que pour tout x dans $[a,b]$, on ait $f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v)$. En intégrant cette inégalité on obtient $f(u)(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant f(v)(b-a)$, et donc $f(u) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leqslant f(v)$. La propriété *des valeurs intermédiaires* donne alors l'existence d'un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$. □

2 Primitives

2.1 Définition et propriétés

Définition 2.1.1 *Une fonction F est dite primitive d'une fonction f sur un intervalle I si pour tout x dans I on a $F'(x) = f(x)$.*

On remarque que si F_1 et F_2 sont deux primitives d'une même fonction f sur intervalle I, alors $(F_1 - F_2)' = 0$ sur I et donc $F_1 - F_2$ est constante sur I. On obient la proposition suivante :

Proposition 2.1.2 *Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I, les primitives de f sur I sont les fonctions $F + C$ où C est une constante réelle.*

On note $\int f(x)\,dx$ les primitives de la fonction f sur un intervalle. Par exemple, sur $]0,+\infty[$ on a $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$ où C est une constante réelle.

Exemples : - Soit $f_1(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$; la fonction f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x réel

$$f_1'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

La fonction f_1 est donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
- Soit $f_2(x) = \ln|x+\sqrt{x^2-1}|$; la fonction f_2 est définie sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ et dérivable

sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, et pour tout $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ on a

$$f_2'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

La fonction f_2 est donc une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$.

2.2 Primitives usuelles

Fonctions	Intervalles	Primitives
$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$x \longmapsto \ln\lvert x\rvert$
$x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$]-\infty,+\infty[$	$x \longmapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1\})$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$x \longmapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(\alpha \neq -1)$	$]0,+\infty[$	$x \longmapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x \longmapsto e^x$	$]-\infty,+\infty[$	$x \longmapsto e^x$
$x \longmapsto \sin x$	$]-\infty,+\infty[$	$x \longmapsto -\cos x$
$x \longmapsto \cos x$	$]-\infty,+\infty[$	$x \longmapsto \sin x$
$x \longmapsto 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$ $(k \in \mathbb{Z})$	$x \longmapsto \tan x$
$x \longmapsto \tan x$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$ $(k \in \mathbb{Z})$	$x \longmapsto -\ln\lvert\cos x\rvert$
$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$	$]-\infty,+\infty[$	$x \longmapsto \operatorname{Arctan} x$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$

$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]-\infty,-1[$ ou $]1,+\infty[$	$x \longmapsto \ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$]-\infty,+\infty[$	$x \longmapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

3 Relation entre intégrale et primitive

3.1 Théorème fondamental

Théorème 3.1.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $a \in I$; pour $x \in I$, on pose $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Alors $\Phi(a) = 0$, Φ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a $\Phi'(x) = f(x)$.*

Remarques : - On dit que Φ est **la** primitive de f sur I qui s'annule au point a.
- Toute fonction continue sur un intervalle admet donc une primitive sur cet intervalle.

Démonstration : On cherche à prouver que $\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}$ tend vers $f(x)$ lorsque h tend vers 0. La relation de Chasles nous donne l'égalité :

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt\ .$$

D'après le théorème de la moyenne, il existe un réel c_h tel que

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c_h)$$

avec $x \leqslant c_h \leqslant x+h$ ou $x+h \leqslant c_h \leqslant x$ (selon que h soit positif ou négatif). Lorsque h tend vers 0, c_h tend vers x. Puisque f est continue en x, cela implique que lorsque h tend vers 0, $f(c_h) = \dfrac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}$ tende vers $f(x)$. Ce qui achève la démonstration. □

3.2 Calcul intégral et primitive

Corollaire 3.2.1 *Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

On utilise souvent la notation : $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Démonstration : Soit F une primitive de f sur $[a,b]$.
On sait que $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est **la** primitive de f qui s'annule au point a. La fonction $F - \Phi$ est donc constante sur $[a,b]$. D'où $F(b) - \Phi(b) = F(a) - \Phi(a)$. Or $\Phi(a) = 0$. Donc $F(b) - F(a) = \Phi(b)$. □

Remarque : Cela donne donc une méthode de calcul de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ pourvu que l'on connaisse une primitive de f sur $[a,b]$.

Proposition 3.2.2 *Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors $f = 0$ sur $[a, b]$.*

Démonstration : Soit $\phi : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$. Puisque $\phi' = f \geqslant 0$ alors ϕ est croissante. De plus $\phi(a) = \phi(b) = 0$ donc ϕ est nulle sur $[a, b]$; il en va donc de même pour sa dérivée f. □

4 Méthodes de calcul intégral

Si l'on connaît une primitive d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$, cela donne une méthode de calcul de $\int_a^b f(t)dt$.

Exemple : La fonction Arctangente est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ donc

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\operatorname{Arctan} x]_0^1 = \operatorname{Arctan} 1 - \operatorname{Arctan} 0 = \frac{\pi}{4}$$

Mais en général on ne connaît pas une telle primitive.

Nous allons voir les deux outils principaux de calcul intégral que sont l'intégration par parties et la formule de changement de variable.

4.1 Intégration par parties

L'intégration par parties transforme l'intégrale d'une fonction sur un intervalle en une intégrale d'une autre fonction sur le même intervalle. Elle est basée sur la dérivée du produit de deux fonctions.

Proposition 4.1.1 *Soient f et g deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur $[a, b]$. Alors :*

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

Démonstration : Soit f et g deux fonctions continûment dérivables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, le produit est dérivable et on a $(fg)' = f'g + fg'$. En intégrant cette égalité entre a et b on obtient

$$[f(t)g(t)]_a^b = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

d'où le résultat.□

Mode d'emploi : La fonction que l'on veut intégrer doit se présenter sous la forme du produit de deux fonctions. Il faut choisir celle que l'on doit dériver (la fonction g de la formule) et celle que l'on va intégrer (la fonction f' de la formule). Il faut bien sûr faire le bon choix, pour se ramener à une intégration plus simple à réaliser. A noter que le choix de f se fait à une constante près.

Exemples :

1. • Calculons $I = \displaystyle\int_1^3 \ln t\, dt$.

   On pose $\begin{cases} f'(t) = 1 \\ g(t) = \ln t \end{cases}$; on obtient $\begin{cases} f(t) = t \\ g'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$, ce qui donne

$$I = \int_1^3 \ln t\, dt = [t \ln t]_1^3 - \int_1^3 t\frac{1}{t}\, dt = 3\ln 3 - [t]_1^3 = 3\ln 3 - 2$$

   • Cette technique permet aussi de calculer les primitives de la fonction ln. Pour tout $x > 0$ posons $\phi(x) = \displaystyle\int_1^x \ln t\, dt$. La même intégration par parties donne

$$\phi(x) = \int_1^x \ln t\, dt = [t \ln t]_1^x - \int_1^x t\frac{1}{t}\, dt = x\ln x - [t]_1^x = x\ln x - x + 1$$

   Les primitives sur $]0, +\infty[$ de la fonction ln sont donc les fonctions $x \longmapsto x\ln x - x + C$ où C est une constante réelle.

2. • Calculons $J = \displaystyle\int_0^1 (2x-1)e^{-3x}\, dx$. On a intérêt à dériver le polynôme $2x - 1$ et à intégrer e^{-3x}. Posons $\begin{cases} f'(x) = e^{-3x} \\ g(x) = 2x - 1 \end{cases}$; on obtient $\begin{cases} f(x) = -\frac{1}{3}\, e^{-3x} \\ g'(x) = 2 \end{cases}$, ce qui donne

$$J = \left[(2x-1)\left(-\frac{1}{3}\, e^{-3x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 2\left(-\frac{1}{3}\, e^{-3x}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{3}\, e^{-3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}\, e^{-3x}\right]_0^1 = -\frac{5}{9}\, e^{-3} - \frac{1}{9}$$

   • Plus généralement, on peut calculer $I = \displaystyle\int_a^b P(t)e^{\alpha t}\, dt$ où P est un polynôme de degré $n \geq 1$ et α un réel non nul en effectuant n intégrations par parties. On procède de la façon suivante : en dérivant le polynôme et en intègrant l'exponentielle on obtient

$$I = \left[\frac{1}{\alpha}P(t)e^{\alpha t}\right]_a^b - \int_a^b P'(t)e^{\alpha t}\, dt.$$

   On est ramené au calcul d'une intégrale du même type, mais avec un polynôme de degré $n-1$. Après n intégrations par parties du même type on est ramené simplement au calcul de $\displaystyle\int_a^b e^{\alpha t}\, dt$.

3. Calculons $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\alpha t}\sin(\beta t)\, dt$ où α et β sont deux réels non nuls et x un réel quelconque.

On peut indifféremment dériver $e^{\alpha t}$ ou $\sin(\beta t)$. Posons par exemple $\begin{cases} f'(t) = e^{\alpha t} \\ g(t) = \sin(\beta t) \end{cases}$; on obtient $\begin{cases} f(t) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \\ g'(t) = \beta \cos(\beta t) \end{cases}$, ce qui donne

$$F(x) = \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \sin(\beta t) \right]_0^x - \frac{\beta}{\alpha} \int_0^x e^{\alpha t} \cos(\beta t)\, dt.$$

Nous sommes ramenés à une intégrale du même type : nous faisons une seconde intégration par parties qui ne nous ramène pas au point de départ; autrement dit, nous continuons à intégrer $e^{\alpha t}$ et à dériver la fonction trigonométrique $\cos(\beta t)$, ce qui donne

$$F(x) = \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \sin(\beta t) \right]_0^x - \frac{\beta}{\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos(\beta t) \right]_0^x - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \int_0^x e^{\alpha t} \sin(\beta t)\, dt,$$

$F(x)$ est donc solution d'une équation du premier degré à une inconnue. On résoud et on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(1 + (\frac{\beta}{\alpha})^2\right)^{-1} \left(\left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \sin(\beta t) \right]_0^x - \frac{\beta}{\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos(\beta t) \right]_0^x \right), \\ &= \left(1 + (\frac{\beta}{\alpha})^2\right)^{-1} \left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\beta}{\alpha^2} \left(e^{\alpha x} \cos(\beta x) - 1 \right) \right). \end{aligned}$$

4.2 Formule de changement de variable

La formule de changement de variable transforme l'intégrale d'une fonction sur un intervalle en une intégrale d'une autre fonction sur un autre intervalle. Elle est basée sur la dérivée de la composée de deux fonctions.

Proposition 4.2.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a,b]$, de dérivée continue, avec $f([a,b]) \subset [c,d]$ et soit $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[c,d]$. Alors*

$$\int_a^b g(f(t)) \cdot f'(t) dt = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u) du.$$

Démonstration : Si G est une primitive de g,

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(u) du = G(f(b)) - G(f(a)).$$

D'autre part, $G \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable et de dérivée :

$$G \circ f'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x)$$

c'est donc une primitive de la fonction $x \mapsto g(f(x)) \cdot f'(x)$. Donc :

$$\int_a^b g(f(t)) \cdot f'(t) dt = Gf(b) - Gf(a)$$

D'où l'égalité recherchée. □

Mode d'emploi :

Un changement de variable se fait avec trois opérations :

- Remplacer u par $f(t)$.
- Remplacer du par $f'(t)dt$.
- Remplacer les bornes $f(a)$ et $f(b)$ par a et b.

La formule s'applique dans les deux sens.

Exemples

• Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t^4+1}\,dt$. On pose $t^2 = u$ d'où $2tdt = du$. Si $t = 0$, $u = 0$ et si $t = 1$, $u = 1$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{t^4+1}\,du &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\underbrace{t^4}_{u^2}+1}\underbrace{2tdt}_{du}\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{2}\left[\text{Arctan}\,(u)\right]_0^1\\ &= \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

• Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t+e^{-t}}\,dt$. On pose $u = e^t$ de sorte que $du = e^t dt$ (ou encore, en remarquant que $\ln(u) = t$, $dt = \dfrac{du}{u}$). Lorsque $t = 0$, $u = 1$; lorsque $t = 1$, $u = e$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2}{e^t+e^{-t}}\,dt &= 2\int_0^1 \frac{1}{e^t+\dfrac{1}{e^t}}\,dt = 2\int_1^e \frac{1}{u+\dfrac{1}{u}}\,\frac{du}{u}\\ &= 2\int_1^e \frac{u}{u^2+1}\,\frac{du}{u} = 2\int_1^e \frac{1}{u^2+1}\,du\\ &= 2\left[\text{Arctan}\,(u)\right]_1^e = 2\text{Arctan}\,(e) - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

• Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$. On pose $x = \sin\theta$ avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, d'où $dx = \cos\theta d\theta$. Lorsque $\theta = 0$, $x = 0$ et lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, $x = 1$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta\\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{4}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

4.3 Intégration d'expressions trigonométriques

Pour calculer des intégrales du type $\int_a^b \sin^p t \cos^q t$ où p et q sont des entiers on distingue deux cas.

Premier cas

Si p est impair (respectivement q est impair) on effectue le changement de variable $u = \cos t$ (respectivement $u = \sin t$) et on obtient, en utilisant la formule $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, une expression de la forme $\int_a^b \sin t \cdot Q_1(\cos t)dt = -\int_{\cos a}^{\cos b} Q_1(u)du$ (respectivement $\int_a^b \cos t \cdot Q_2(\sin t)dt = \int_{\sin a}^{\sin b} Q_2(u)du$), où Q_1 et Q_2 sont des fonctions polynômiales.

Deuxième cas

Si p et q sont pairs on linéarise l'expression.

Exemples :

1. Calculons une primitive de $x \longmapsto \sin^4 x \cos^3 x$.
   On va calculer $F(x) = \int_0^x \sin^4 t \cos^3 t dt$. Comme $q = 3$ est impair, on effectue le changement de variable $u = \sin t$; on a $du = \cos t dt$ et
   $$\sin^4 t \cos^3 t = \sin^4 t(1 - \sin^2 t) \cos t = Q(\sin t) \cos t$$
   avec $Q(u) = u^4(1 - u^2) = u^4 - u^6$. On obtient
   $$F(x) = \int_0^{\sin x} (u^4 - u^6)\, du = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7}$$

2. Calculons $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^2 t\, dt$. On linéarise $\cos^2 t \sin^2 t$. On a
   $$\cos^2 t \sin^2 t = \frac{1}{4} \sin^2 2t = \frac{1}{8}(1 - \cos 4t)$$
   D'où
   $$I = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)\, dt = \frac{1}{8} \left[t - \frac{1}{4} \sin 4t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

Remarque :

La méthode de linéarisation est valable dans tous les cas mais la méthode préconisée quand l'un des exposants est impair est beaucoup plus rapide.

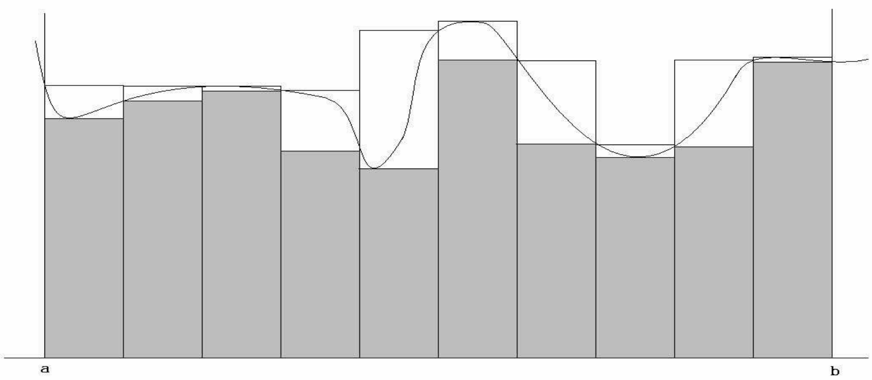
5 Calcul numérique des intégrales

5.1 Cas général

Soit f une fonction continue positive sur un intervalle fermé borné $[a,b]$. On essaie de calculer numériquement $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, c'est-à-dire l'aire de la surface délimitée par les droites $y=0$, $x=a$, $x=b$ et le graphe de f.
On peut encadrer cette aire par des sommes finies d'aires de rectangles comme suit :

pour n dans $\mathbb{N}^*$ on divise l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles $I_i = \left[a + i\dfrac{b-a}{n},\, a+(i+1)\dfrac{b-a}{n}\right]$ de longueur $\dfrac{b-a}{n}$ pour $i=0,\cdots,n-1$.

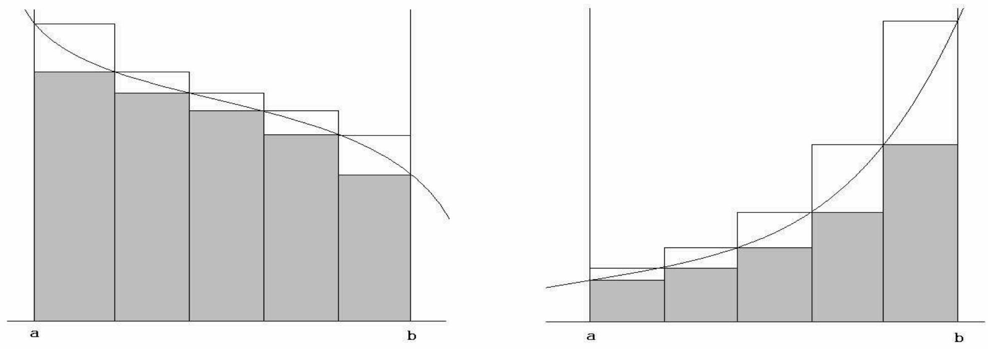
La fonction f étant continue sur chacun des intervalles I_i, elle admet un minimum m_i et un maximum M_i sur cet intervalle.



Alors l'aire recherchée est comprise entre $s_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} m_i \frac{b-a}{n}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} M_i \frac{b-a}{n}$.

On peut également définir s_n et S_n lorsque f n'est pas positive sur $[a,b]$ et on a pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $s_n \le \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \le S_n$.

5.2 Cas des fonctions monotones



Si la fonction f est croissante sur $[a,b]$ on a $m_i = f\left(a + i\dfrac{b-a}{n}\right)$ et $M_i = f\left(a + (i+1)\dfrac{b-a}{n}\right)$. Donc

$$s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

On en déduit $S_n - s_n = \dfrac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$.

Si la fonction f est décroissante sur $[a,b]$ on a $m_i = f\left(a + (i+1)\dfrac{b-a}{n}\right)$ et $M_i = f\left(a + i\dfrac{b-a}{n}\right)$. Donc

$$s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

On en déduit $S_n - s_n = \dfrac{b-a}{n}(f(a) - f(b))$. On obtient :

Proposition 5.2.1 *Lorsque f est monotone sur $[a,b]$, l'amplitude de l'encadrement*

$$s_n \leq \int_a^b f(t)dt \leq S_n$$

est $\dfrac{b-a}{n}\,|f(b) - f(a)|$.

Remarque : Puisque $\dfrac{b-a}{n}\,|f(b)-f(a)|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, l'encadrement peut être rendu aussi précis que l'on veut, pourvu que n soit assez grand.

5.3 Exemple de calcul numérique d'une intégrale

Nous allons approximer l'intégrale $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ par ce qu'on appelle la *méthode des rectangles* :
La fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est décroissante sur $[0,1]$. On a $(1-0)|e^{-1} - e^0| \sim 0.6$ donc si l'on veut approximer I à 10^{-2} près il suffit de prendre $n = 100$. On obtient avec une machine

$$s_{100} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} e^{-i^2/100^2} \sim 0.7436573983 \quad \text{et} \quad S_{100} = \frac{1}{100} \sum_{i=0}^{99} e^{-i^2/100^2} \sim 0.7499786039$$

On a donc l'encadrement suivant

$$0.743 < s_{100} \leqslant I \leqslant S_{100} < 0.750$$

dont l'amplitude est 7.10^{-3}.

6 Application aux équations différentielles linéaires d'ordre un

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Dans tout ce paragraphe, a et b sont des fonctions continues sur I.

6.1 Définitions

Définition 6.1.1 *On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation (E) de la forme:*

$$(E) \quad y' = a(x)y + b(x)$$

On appelle solution de (E) sur I une fonction φ continue et dérivable sur I, telle que:

$$\forall\, x \in I \quad , \quad \varphi'(x) = a(x)\, \varphi(x) + b(x).$$

6.2 Équation linéaire homogène

Définition 6.2.1 *On dit qu'une équation différentielle linéaire du premier ordre est homogène lorsque $b(x) = 0$.*

Définition 6.2.2 *Soit (E) l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$. On appelle équation différentielle homogène associée à (E) l'équation*

$$(E_1) \quad y' = a(x)y$$

Théorème 6.2.3 *Soit (E_1) l'équation différentielle linéaire homogène $y' = a(x)y$.*
On note $A(x)$ une primitive de $a(x)$.
Alors, les solutions de (E_1) sont de la forme $y = C\, e^{A(x)}$, où C est une constante réelle.

Démonstration
On fait un changement de fonction inconnue: on pose $y = z\ e^{A(x)}$.
La dérivée de y est $y' = z'\ e^{A(x)} + z\ a(x)\ e^{A(x)}$
Et en remplaçant dans (E_1), on obtient :

$$z'\ e^{A(x)} + z\ a(x)\ e^{A(x)} = a(x)\ z\ e^{A(x)}$$

$\Rightarrow \quad z'\ e^{A(x)} = 0 \Rightarrow \quad z' = 0 \Rightarrow \quad z$ est une constante C .
D'où $y = C\ e^{A(x)}$.

On constate que les solutions dépendent d'une constante . Il y a donc une infinité de solutions.□

6.3 Cas général

Soit (E) l'équation différentielle linéaire $y' = a(x)y + b(x)$. Supposons que l'on connaisse une solution φ_0 de (E) sur l'intervalle I. Cette solution est-elle unique?

Proposition 6.3.1 *Soit (E) l'équation différentielle linéaire $y' = a(x)y + b(x)$ sur un intervalle I . Si φ_0 est une solution sur I alors les solutions sur I de (E) sont de la forme $\varphi = \varphi_0 + Ce^{A(x)}$ où C est une constante réelle et $A(x)$ une primitive de $a(x)$ sur I.*

Démonstration
Soit (E) l'équation linéaire $y' = a(x)y + b(x)$.
Soit φ_0 une solution. Soit φ une éventuelle autre solution.
Les fonctions φ_0 et φ étant solutions de (E), on a $\varphi\prime_0 = a(x)\varphi_0 + b(x)$ et $\varphi\prime = a(x)\varphi + b(x)$.
Par soustraction, on obtient : $\varphi\prime - \varphi\prime_0 = a(x)(\varphi - \varphi_0)$
Par conséquent, $\varphi - \varphi_0$ est solution de l'équation homogène associée : $y' = a(x)y$
On en déduit que $\varphi - \varphi_0 = Ce^{A(x)}$ où $A(x)$ une primitive de $a(x)$ sur I.
Donc $\varphi = \varphi_0 + Ce^{A(x)}$ où C est une constante réelle.□

Ainsi l'équation (E) admet une infinité de solutions qui dépendent des valeurs de la constante C. □

Définition 6.3.2 *Cette famille de solutions est appelée la solution générale de l'équation différentielle.*

Définition 6.3.3 *Une solution qui correspond à une valeur donnée de C est appelée solution particulière de l'équation différentielle.*

On déduit de ce qui précède :

Théorème 6.3.4 *La solution générale d'une équation différentielle linéaire est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation complète.*

Exemple

Résoudre l'équation $y' + y = e^x$.
Cette équation est de la forme $y' = a(x)y + b(x)$ avec $a(x) = -1$ et $b(x) = e^x$

- $A(x) = -x$ étant une primitive de $a(x)$, l'équation homogène associée a pour solution générale $y = C\ e^{-x}$.
- Il est clair que $y_0 = \dfrac{e^x}{2}$ est une solution particulière de l'équation complète.

Par conséquent, la solution générale de cette équation est $y = C\ e^{-x} + \dfrac{e^x}{2}$.

6.4 Méthode de variation de la constante

Il n'est pas toujours facile de deviner une solution particulière de l'équation homogène associée. Pour en trouver une, on peut appliquer la méthode de variation de la constante:
Soit (E) l'équation linéaire $y' = a(x)y + b(x)$.

- On commence par résoudre l'équation homogène associée. La solution générale de cette équation est de la forme $C\ e^{A(x)}$.
- On fait le changement de fonction inconnue $y = z\ e^{A(x)}$.

  La dérivée de y est $y' = z'\ e^{A(x)} + z\ a(x)\ e^{A(x)}$.

  En remplaçant dans (E), on obtient :

$$z'\ e^{A(x)} + z\ a(x)\ e^{A(x)} = a(x)\ z\ e^{A(x)} + b(x)$$

$$\Rightarrow \quad z'\ e^{A(x)} = b(x) \Rightarrow \quad z' = b(x)\ e^{-A(x)}$$

  On s'aperçoit que, pour trouver z , il suffit de calculer une primitive $F(x)$ de $b(x)\ e^{-A(x)}$.

  On aura alors: $z = F(x) + K$.
- Par conséquent, la solution générale de l'équation (E) est $y = F(x) + K\ e^{A(x)}$.

Pratiquement, on n'introduit pas la lettre z, mais on conserve la lettre C, et on la considère comme une fonction $C(x)$.
Exemple Résoudre l'équation $y' = \dfrac{2}{x}y + x^3$.
On se place sur un intervalle qui ne contient pas 0.
Cette équation est de la forme $y' = a(x)y + b(x)$ avec $a(x) = \dfrac{2}{x}$ et $b(x) = x^3$.
L'équation homogène associée est de la forme $y' = a(x)y$ avec $a(x) = \dfrac{2}{x}$.

- $A(x) = 2\ln|x| = \ln x^2$ étant une primitive de $a(x)$, l'équation homogène associée a pour solution générale $y = C\ e^{\ln x^2} = C\ x^2$.

- On utilise la méthode de variation de la constante: on pose $y = C(x)\ x^2$.

  On a $y' = C'(x)\ x^2 + C(x)\ .\ 2x$.

  En remplaçant y et $y\prime$ par ces valeurs dans l'équation, on obtient:

  $C'(x)\ x^2 + C(x)\ \ 2x = \frac{2}{x}C(x).x^2 + x^3$

  $C'(x)\ x^2 = x^3$

  $C'(x) = x$

  $C(x) = \frac{x^2}{2} + K.$

- Par conséquent, la solution générale de l'équation donnée est :

$$y = \frac{x^2}{2} + Kx^2 = \frac{x^4}{2} + K\ x^2$$

.

7 Exercices

Exercice 1 On définit, pour tout entier $n > 0$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t} dt$.
1. Montrer, sans calculer I_n, que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Converge-t-elle ?
2. Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2 Comparez, sans les calculer, les quantités

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\,dx$$

Exercice 3 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} |\cos x|\,dx$.

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = a\sin(wt+\varphi)$ où a et w sont deux réels strictement positifs et φ un réel quelconque. Calculer la valeur moyenne de f sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{w}\right]$.

Exercice 5 Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 (t^2 - t + 1)\,dt$ 2) $\displaystyle\int_1^8 t^{\frac{1}{3}}\,dt$ 3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(1+s)^3}\,ds$

4) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ 5) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du$ 6) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{s^2-1}}\,ds$

Exercice 6 Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant les intervalles où elles sont définies :

1) $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 2) $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$ 3) $x \longmapsto 3x\,e^{x^2}$ 4) $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$

Indication : on essaiera de reconnaître des dérivées de fonctions composées.

Exercice 7 Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties, répétée si nécessaire :

1) $\displaystyle\int_0^1 te^{2t}\,dt$ 2) $\displaystyle\int_0^\pi t\sin t\,dt$ 3) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi t\cos t\,dt$

4) $\displaystyle\int_1^e t\ln t\,dt$ 5) $\displaystyle\int_0^1 t^2e^{-t}\,dt$ 6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t\cos t\,dt$

7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^3}\,dx$ 8) $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{x}{\sqrt{5+x}}\,dx$ 9) $\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2\,dx$

Exercice 8 Calculer les primitives des fonctions suivantes (en précisant les intervalles où elles sont définies) en utilisant une ou plusieurs intégrations par parties :

1) $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ 2) $x \longmapsto \arctan x$ 3) $x \longmapsto x\,\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$ 4) $x \longmapsto x\cos x$

Exercice 9 Pour tout entier naturel n on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x\,dx$.

1. Montrer que $I_n = e - nI_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
2. En déduire I_3.

Exercice 10 Pour tout entier naturel n on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (x^2-1)^n\,dx$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, établir que, pour $n \geqslant 1$, $I_n = -\dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
2. En déduire la valeur de I_n.

Exercice 11 Soit $x > 0$. On définit les intégrales $F(x)$ et $G(x)$ par :

$$F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)\,dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\,dt$$

En utilisant des intégrations par parties, prouver que $F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x)$ et $G(x) = x\sin(\ln x) - F(x)$. En déduire les expressions de $F(x)$ et $G(x)$.

Exercice 12 1. Calculer la dérivée de $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.
2. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+2}}$.
3. Soient $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}\,dt$, et $K = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{t^2+2}\,dt$. Montrer que $J + 2I = K$.
4. Montrer, en intégrant K par parties, que $K = \sqrt{3} - J$.
5. Retrouver ce résultat en intégrant J par parties.
6. Calculer J et K.

Exercice 13 Calculer les intégrales suivantes, à l'aide d'un changement de variables :

1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{t^2}{t^6+1}\,dt$ 2) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{t}}\,dt$ 3) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})\,dx$ 4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{(t^4+1)^2}\,dt$

Exercice 14 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x\,dx$.

Exercice 15 Déterminer deux réels a, b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\} \qquad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

En déduire le calcul de $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{x(x+1)}$.

Exercice 16 Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$. (*Indication : on mettra le polynôme* x^2+x+1 *sous la forme* $(x+a)^2+b^2$ *puis on effectuera le changement de variable* $x+a = bt$).

Exercice 17 On veut calculer l'intégrale $J = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^3+1}$.

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad \frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

2. Calculer J à l'aide d'un changement de variable comme dans l'exercice précédent.

Exercice 18 On considère la fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ par

$$F(x) = \frac{x^4-4x^3+10x^2-13x+5}{(x-1)^2(x-2)}$$

1. Montrer qu'il existe des réels a, b, c, d, e tels que $F(x) = ax+b+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{(x-1)^2}+\frac{e}{x-2}$.
2. En déduire des primitives de F sur les intervalles où elle est définie.

Exercice 19 Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1) $x^3e^{-x^2}$	2) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	3) $\frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}$	4) $\operatorname{Arcsin} x$
5) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	6) $(e^x+1)^2e^x$	7) $x^2(1-x^3)^{\frac{1}{3}}$	8) x^2e^{-x}

Exercice 20 Calculer l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1+x-x^2}\,dx$.
Indication : on mettra le polynôme du second degré sous la forme $b^2-(x+a)^2$ *et on effectuera le changement de variable* $x+a = b\sin\theta$.

Exercice 21 Pour tout $x > 0$ on pose $G(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,dt$ et $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

1. En utilisant la relation de Chasles exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.
2. En déduire le calcul de $G'(x)$.
3. Donner le sens de variation de G sur $]0, \pi]$.

Exercice 22
1. Soit $a > 0$. Montrer que si une fonction continue f est paire sur $[-a, a]$, alors la fonction définie par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ est impaire.

2. Démontrer un résultat analogue lorsque la fonction f est impaire.
3. Soit $g\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue, périodique de période $T>0$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $G(x)=\displaystyle\int_x^{x+T} g(t)\,dt$. Montrer que G est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée. En déduire que G est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
Sous quelle condition la fonction $H : x\mapsto \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ est-elle périodique, de période T ?

Exercice 23 *Intégration numérique par la méthode des rectangles*

1. Donner, à l'aide de la méthode des rectangles, un encadrement d'amplitude 10^{-1} de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0)=1$ et $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ pour x dans $\mathbb{R}^*$.
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et décroissante sur $[0,\pi]$.
   (b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,dx$.

Exercice 24 *Estimation de $n!$ par la méthode des rectangles*

1. Montrer que l'on a pour k entier
$$\forall k\geq 2\ ,\ \int_{k-1}^k \ln t\,dt\leq \ln k \quad \text{et} \quad \forall k\geq 1\ ,\ \ln k\leq \int_k^{k+1}\ln t\,dt$$
2. En déduire pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ l'encadrement
$$\int_1^n \ln t\,dt\leq \ln(n!)\leq \int_1^n \ln t\,dt+\ln n$$
3. En déduire pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ l'encadrement de $n!$:
$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n\leq n!\leq ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Exercice 25 *Développement du logarithme*
Soit n dans $\mathbb{N}$ et x dans $]-1,+\infty[$.

1. Montrer que
$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k=\frac{1}{1+x}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

2. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt$$

3. Montrer que
$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt \leq \frac{1}{n+2}$$

4. Conclure que
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

5. Plus généralement, montrer que si $0 \leq x \leq 1$
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x)$$

Exercice 26 Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = -y + \cos x$. Montrer qu'elle n'admet qu'une seule solution périodique.

Exercice 27 Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes sur les intervalles considérés :
1) $(1-x^2)\, y' - x\, y = 1, \quad]-1, 1[.$
2) $x\, y' - \dfrac{y}{2} = x \ln x, \quad]0, +\infty[.$

Exercice 28 Déterminer la solution sur $\left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle
$$y' - (\tan x) y = x$$
vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 29 On considère l'équation différentielle (E) $xy' + 2y = x^2$.

1. Chercher une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, polynomiale de degré inférieur ou égal à deux.
2. En déduire toutes les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
3. Combien y a t-il de solution(s) de (E) sur $\mathbb{R}$?

Exercice 30 On considère l'équation différentielle (E) $y' = y + f(x)$, où f est une fonction de période $T > 0$ continue sur $\mathbb{R}$.
1) Exprimer la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ à l'aide de la fonction $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t} f(t) dt.$
2) Montrer que $F(x+T) = e^{-T} F(x) + F(T)$.
En déduire que (E) admet une unique solution de période T, que l'on déterminera.