Université Paris 13- Sup Galilée
MACS 1
Mathématiques

Année universitaire 2013-2014

Feuille d'exercices 6
Séries de Fourier

Exercice 1
Soit f l'application 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie en tout $x \in [-\pi, \pi]$ par : $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$. Déterminer la série de Fourier de f et montrer qu'elle converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

En déduire les sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Calculer pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 2
Soit $f(\theta)$ la fonction périodique de période 2π qui sur $[-\pi, \pi]$ vaut 1 si $\theta \geq 0$ et -1 si $\theta < 0$.

1- Décomposer f en série de Fourier. En quel sens a lieu la convergence de la série vers la fonction f.
2- La série converge -t-elle uniformément sur $[-\pi, \pi]$.
3- Calculer la somme de la série numérique : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

Exercice 3
Soit g l'application 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie en tout $x \in [-\pi, \pi[$ par $g(x) = e^{\alpha x}$, où α est un nombre réel non nul.

1- Déterminer la série de Fourier de g.

2- En déduire l'expression de $S(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}$ pour α non nul.

3- Peut-on, à l'aide de cette expression, retrouver $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 4 (*développement Eulérien de* cotan$x$).
Soit a un réel non entier et f l'application 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie en tout $x \in [-\pi, \pi]$ par $f(x) = \cos ax$. Écrire la série de Fourier de f et en déduire :

$$\text{cotan}(\pi a) = \frac{1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}, \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Exercice 5
Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 2π-périodique, impaire, définie en tout $x \in [0, \pi]$ par : $f(x) = (\sin x)^2$.

a) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que f' est somme de sa série de Fourier et la déterminer.

Exercice 6
Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ sur $]0, \pi[$, est développable en série de sinus, en série de cosinus.

Exercice 7
Pour $f \in L^2([0, \pi])$ on pose $\tilde{f}(\theta) = \dfrac{f(\theta)}{\sqrt{2}}$ si $\theta > 0$ et $\tilde{f}(\theta) = \dfrac{f(-\theta)}{\sqrt{2}}$ si $\theta < 0$.

1. Montrer que l'application de $L^2([0, \pi])$ dans $L^2([-\pi, \pi])$ qui a f associe $\tilde{f}$ est une isométrie.
2. Quelle relation lie les coefficients de Fourier $c_n(\tilde{f})$ et $c_{-n}(\tilde{f})$?
3. Montrer que la famille $(\cos n\theta)_{n\geq 0}$ est orthogonale dans $L^2([0, \pi])$. En déduire une base hilbertienne de $L^2([0, \pi])$.
4. Même question avec la famille $(\sin n\theta)_{n\geq 0}$.

Exercice 8
Soit $\mathbf{T}^1$ le cercle paramétré par l'angle-au-centre θ, et muni de la mesure de Lebesgue $d\theta$. Soit $H^1(\mathbf{T}^1) = \{u \in L^2(\mathbf{T}^1);\ \dfrac{du}{d\theta} \in L^2(\mathbf{T}^1)\}$ avec $(u, v)_{H^1} = \displaystyle\int_{\mathbf{T}^1} u\bar{v} + \int_{\mathbf{T}^1} u'\overline{v'}$.

Montrer que $H^1(\mathbf{T}^1) = \{u = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u) \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{\pi}};\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 + n^2)|c_n(u)|^2 < \infty\}$, où le produit scalaire est donné par : $(u,v)_{H^1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)c_n(u)\overline{c_n(v)}$. Ici $c_n(u)$ désigne le $n$ième coefficient de Fourier de u.

Exercice 9
Soit a un complexe, à toute fonction complexe f de période 2π et de carré intégrable sur $[-\pi,\pi]$, on associe la fonction Tf définie par

$$Tf(x) = f(x) + a\big(f(x+\frac{2\pi}{3}) + f(x-\frac{2\pi}{3})\big).$$

1- Montrer que $Tf \in L^2([-\pi,\pi])$ et que T est une application linéaire, continue de $L^2([-\pi,\pi])$ dans lui-même.

2- Calculer les coefficients de Fourier de Tf en fonction des coefficients de Fourier de f. En déduire la norme de T.

3- Trouver les valeurs de a pour lesquelles T est inversible et déterminer alors l'opérateur inverse.

Exercice 10
Soit $f(\theta) = \frac{3(1-\cos\theta)}{5-4\cos\theta}$.

1- Montrer que $f(\theta) = \mathrm{Re}\,\frac{1-e^{i\theta}}{2-e^{i\theta}}$.

2- En déduire la séries de Fourier de f.

3- Soit (D) le disque unité, de bord le cercle unité (C). Donner la solution $u(r,\theta)$ du problème de Laplace-Poisson suivant :

$$\Delta u = 0 \text{ dans } (D), \quad u = f \text{ sur } (C).$$

Problème
On note E l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, périodiques de période 2π et de carré intégrable sur $[0,2\pi]$. La norme sur E est donnée par :

$$||f||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx, \quad f \in E.$$

Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{Z}$, on note $c_n(f)$ le $n-$ième coefficient de Fourier de f.

Soit T l'opérateur linéaire de E dans lui-même défini par

$$Tf(x) = f(x+1), \quad \forall f \in E \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour $f \in E$, on pose $S_0 f = 0$ et, pour tout entier $k \geq 1$,

$$S_k f = f + Tf + T^2 f + \cdots + T^{k-1} f.$$

1. a- Calculer les coefficients de Fourier $c_n(Tf)$ et $c_n(S_k f)$ pour tous $k \geq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$ en fonction des coefficients $c_n(f)$. (traiter séparément le cas $n = 0$).

b- Montrer que lorsque f est un polynôme trigonométrique les moyennes $\frac{1}{k}S_k f$ convergent dans E vers la constante $c_0(f)$.

c- Montrer que la norme de $\frac{1}{k}S_k$ dans $\mathcal{L}(E)$ est inférieure ou égale à 1 pour tout $k \geq 1$ et en déduire que le résultat de b- reste vrai pour toute fonction f de E.

2. a- Soit $g \in E$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de Fourier $c_n(g)$ pour que l'équation $f - Tf = g$ admette une solution f dans E.

b- Pour $k \geq 1$, on pose

$$f_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} S_j g.$$

Calculer les coefficients $c_n(f_k)$ en fonction des $c_n(g)$ pour tous $k \geq 1$ et $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ fixé, $c_n(f_k)$ tend vers $\frac{c_n(g)}{1-e^{in}}$ lorsque k tend vers l'infini. En déduire que si la suite $(S_k g)_k$ est bornée dans E, alors l'équation $f - Tf = g$ admet une solution f dans E.

c- Inversement on suppose que $g = f - Tf$ avec $f \in E$. Exprimer les $S_k g$ puis les f_k en fonction de f. En déduire que la suite $(S_k g)_k$ est bornée et que $(f_k)_k$ converge vers $f - c_0(f)$ dans E.